\section{الگوریتم دوچ - جوزا}

Deutsch’s algorithm is a simple case of a more general quantum algorithm, which we shall

refer to as the Deutsch–Jozsa algorithm. The application, known as Deutsch’s problem,

may be described as the following game. Alice, in Amsterdam, selects a number x from

0 to 2n − 1, and mails it in a letter to Bob, in Boston. Bob calculates some function

f (x) and replies with the result, which is either 0 or 1. Now, Bob has promised to use

a function f which is of one of two kinds; either f (x) is constant for all values of x,

or else f (x) is balanced, that is, equal to 1 for exactly half of all the possible x, and 0

for the other half. Alice’s goal is to determine with certainty whether Bob has chosen a

constant or a balanced function, corresponding with him as little as possible. How fast

can she succeed?

الگوریتم دوچ توضیح ساده از یک الگوریتم کوانتومی عمومی‌تر است که به عنوان الگوریتم دوچ-جوزا شناخته می‌شود. کاربرد این الگوریتم، که به عنوان مشکل دوچ شناخته می‌شود، به شرح زیر است:

آلیس، در آمستردام، یک عدد x را از بازه‌ $[0, 2^n-1]$ انتخاب می‌کند و آن را در یک نامه به باب، در بوستون، می‌فرستد. باب یک تابع$ f(x)$ را محاسبه می‌کند و نتیجه را که 0 یا 1 است، ارسال می‌کند. اکنون، باب قول داده است که از یک مدل تابع استفاده خواهد کرد؛ این تابع یا$ f(x)$ که برای همه مقادیر $x$ ثابت است، یا $f(x)$ متعادل است، یعنی‌ حاصل آن برای دقیقاً نیمی از همه xهای ممکن برابر با 1 است و برای نیمی دیگر برابر با 0 است.

هدف آلیس این است که با اطمینان و بکار بستن کمترین گام‌های ممکن تعیین کند که باب یک تابع ثابت یا متعادل را انتخاب کرده است. او چگونه می‌تواند به سرعت موفق شود؟

در حالت کلاسیک، آلیس ممکن است فقط یک مقدار x را در هر نامه به باب ارسال کند. در بدترین حالت، الی باید حداقل $\frac{2^n}{2} + 1$ بار از باب سوال کند، زیرا ممکن است قبل از دریافت یک، $\frac{2^n}{2}$ مرتبه پاسخ $0$ را دریافت کند. آلیس باید یک را دریافت کند؛‌تا بتواند به او بگوید که تابع باب متعادل است.

یعنی در بهترین الگوریتم کلاسیک که می تواند استفاده کند بنابراین به$\frac{2^n}{2} + 1$ پرسش نیاز دارد. توجه داشته باشید که در هر نامه، آلیس n بیت اطلاعات را به باب ارسال می کند. علاوه بر این، در این مثال، فاصله فیزیکی باب و آلیس و به تبع آن افزایش هزینه محاسبه $f(x)$ و دشواری‌های احتمالی اجرای تابع $f(x)$ درنظر گرفته نشده‌است.

اگر باب و آلیس بتوانند کیوبیت ها را به جای بیت های کلاسیک مبادله کنند، و اگر باب موافقت کند $f (x)$ را با استفاده از تبدیل یکه‌ی \lr{$U\_{f}$} محاسبه کند، سپس آلیس می تواند هدف خود را در یک مکاتبه با باب و با استفاده از الگوریتم زیر به دست آورد.

با توجه به الگوریتم دوچ، آلیس یک رجیستر n کیوبیتی را برای ذخیره پرس و جو خود آماده می کند و یک رجیستر کیوبیت واحد را که به باب می دهد تا پاسخ را در آن ذخیره کند. او هر دو رجیستر پرس و جو و پاسخ خود را در یک حالت برهمنهی آماده می کند. باب f(x) را با استفاده از موازی سازی کوانتومی ارزیابی می کند و نتیجه را به آلیس برمی گرداند. آلیس سپس با استفاده از اعمال تبدیل هادامارد روی رجیستر پرس و جو(n-کیوبیتی)، حالات برهمنهی تداخل می‌دهد و با انجام یک اندازه گیری مناسب، تعیین می کند که آیا f ثابت یا متعادل است.

گام‌های خاص الگوریتم در شکل 1.20 نشان داده شده است. بیایید با دنبال کردن این مدار، به بررسی حالات ایجاد شده بپردازیم.

حالت ورودی |ψ0〉 = $vert 0 \rangle$⊗n|1〉 (1.46)؛‌ شبیه حالت معادله (1.41) است، اما در اینجا رجیستر پرس و جو وضعیت n کیوبیت را توصیف می‌کند که همه در حالت $vert 0 \rangle$ آماده شده‌اند. پس از اعمال تبدیل هامادارد روی رجیستر پرس و جو و روی رجیستر پاسخ، می‌توان نوشت:

|ψ1〉 = ∑x∈{0,1}n|x〉√2n[ $vert 0 \rangle$ − |1〉√2]

The query register is now a superposition of all values, and the answer register is in an evenly weighted superposition of 0 and 1. Next, the function f is evaluated (by Bob)

using Uf : |x, y〉 → |x, y ⊕ f (x)〉, giving (1.48) Alice now has a set of qubits in which the result of Bob’s function evaluation is stored

in the amplitude of the qubit superposition state. She now interferes terms in the super-

position using a Hadamard transform on the query register. To determine the result of

the Hadamard transform it helps to first calculate the effect of the Hadamard transform

on a state |x〉. By checking the cases x = 0 and x = 1 separately we see that for a single

qubit H|x〉 = ∑

z (−1)xz |z〉/√2. Thus (1.49) This can be summarized more succinctly in the very useful equation(1.50) where x · z is the bitwise inner product of x and z, modulo 2. Using this equation

and (1.48) we can now evaluate |ψ3〉,(1.51) Alice now observes the query register. Note that the amplitude for the state $vert 0 \rangle$⊗n is

∑

x(−1)f (x)/2n.

رجیستر پرس و جو اکنون یک برهمنهی از همه مقادیر ممکن به‌شمار می‌آید؛ درحالی که رجیستر پاسخ در یک برهمنهی به طور مساوی وزن شده از 0 و 1 محسوب می‌شود\footnote{یعنی احتمال رخ‌دادن صفر و یک یکسان است.}.

در مرحله بعد، تابع f توسط باب و به شکل Uf : |x, y〉 → |x, y ⊕ (x)〉f ارزیابی می شود ، که (1.48) را می دهد.

آلیس اکنون یک مجموعه کیوبیت دارد که در آن نتیجه اعمال تابع باب در دامنه کیوبیت حالت برهمنهی ذخیره می شود. او اکنون با استفاده از تبدیل هادامارد روی رجیستر پرس و جو، عبارات را در حالت برهمنهی کوانتومی تداخل می کند.

برای تعیین نتیجه تبدیل هادامارد، بهترست ابتدا اثر تبدیل هادامارد را روی یک حالت |x〉 محاسبه کنیم. با بررسی موارد x = 0 و x = 1 به صورت جداگانه می بینیم که برای یک کیوبیت واحد H|x〉 = ∑z (−1)xz |z〉/√2 می‌باشد. بنابراین (1.49)

این را می توان به طور خلاصه در معادله بسیار مفید زیر خلاصه کرد:

(1.50)

جایی که x · z bitwise inner product x و z است، به modulo 2.

با استفاده از این معادله و (1.48) اکنون می توانیم |ψ3〉 را ارزیابی کنیم:

(1.51)

آلیس اکنون رجیستر پرس و جو را مشاهده می کند. توجه داشته باشید که دامنه برای حالت $vert 0 \rangle$⊗n است

∑

x(−1)f (x)/2n.

\textbf{از استاد بپرس اشکاااااللللل}

Let’s look at the two possible cases – f constant and f balanced – to

discern what happens. In the case where f is constant the amplitude for $vert 0 \rangle$⊗n is +1 or

−1, depending on the constant value f (x) takes. Because |ψ3〉 is of unit length it follows

that all the other amplitudes must be zero, and an observation will yield 0s for all qubits

in the query register. If f is balanced then the positive and negative contributions to the

amplitude for $vert 0 \rangle$⊗n cancel, leaving an amplitude of zero, and a measurement must yield

a result other than 0 on at least one qubit in the query register. Summarizing, if Alice measures all 0s then the function is constant; otherwise the function is balanced. The

Deutsch–Jozsa algorithm is summarized below.

بیایید به دو مورد ممکن - f ثابت و f متعادل - نگاه کنیم تا ببینیم چه اتفاقی می افتد.

در صورتی که f ثابت باشد، دامنه برای حالت $vert 0 \rangle$⊗n برابر است با +1 یا −1، بسته به مقدار ثابت f (x) که می‌گیرد.

از آنجایی که |ψ3〉 طول واحد است، نتیجه می‌گیریم که تمام دامنه‌های دیگر باید صفر باشند، و یک مشاهده 0 را برای همه کیوبیت‌ها در رجیستر پرس و جو به همراه خواهد داشت.

اگر f متعادل باشد، سهم مثبت و منفی دامنه برای $vert 0 \rangle$⊗n خنثی می‌شود، و یک دامنه صفر باقی می‌ماند، و یک اندازه‌گیری باید نتیجه‌ای غیر از 0 را در حداقل یک کیوبیت در رجیستر پرس و جو به همراه داشته باشد.

به طور خلاصه، اگر الی همه 0 را اندازه گیری کند، تابع ثابت است؛ در غیر این صورت تابع متعادل است.

الگوریتم Deutsch-Jozsa در زیر خلاصه شده است:

Algorithm: Deutsch–Jozsa

Inputs: (1) A black box Uf which performs the transformation

|x〉|y〉 → |x〉|y ⊕ f (x)〉, for x ∈ {0, . . . , 2n − 1} and f (x) ∈ {0, 1}. It is

promised that f (x) is either constant for all values of x, or else f (x) is balanced,

that is, equal to 1 for exactly half of all the possible x, and 0 for the other half.

Outputs: 0 if and only if f is constant.

Runtime: One evaluation of Uf . Always succeeds.

Procedure:

1. $vert 0 \rangle$⊗n|1〉 initialize state

2. → 1

√2n

2n −1∑

x=0

|x〉

[ $vert 0 \rangle$ − |1〉

√2

] create superposition using

Hadamard gates

3. → ∑

x

(−1)f (x)|x〉

[ $vert 0 \rangle$ − |1〉

√2

]

calculate function f using Uf

4. → ∑

z

∑

x

(−1)x·z+f (x)|z〉

√2n

[ $vert 0 \rangle$ − |1〉

√2

]

perform Hadamard transform

5. → z measure to obtain final output z

We’ve shown that a quantum computer can solve Deutsch’s problem with one evalu-

ation of the function f compared to the classical requirement for 2n/2 + 1 evaluations.

This appears impressive, but there are several important caveats. First, Deutsch’s prob-

lem is not an especially important problem; it has no known applications. Second, the

comparison between classical and quantum algorithms is in some ways an apples and

oranges comparison, as the method for evaluating the function is quite different in the

two cases. Third, if Alice is allowed to use a probabilistic classical computer, then by

asking Bob to evaluate f (x) for a few randomly chosen x she can very quickly determine

with high probability whether f is constant or balanced. This probabilistic scenario is

perhaps more realistic than the deterministic scenario we have been considering. Despite

these caveats, the Deutsch–Jozsa algorithm contains the seeds for more impressive quan-

tum algorithms, and it is enlightening to attempt to understand the principles behind its

operation.

الگوریتم: Deutsch–Jozsa

ورودی‌ها: (1) یک جعبه سیاه Uf که تبدیل زیر را انجام می‌دهد

|x〉|y〉 → |x〉|y ⊕ f (x)〉, برای x ∈ {0، ...، 2n - 1} و f (x) ∈ {0، 1}. قول داده شده است که f (x) برای همه مقادیر x ثابت است یا f (x) متعادل است،

یعنی برای دقیقاً نیمی از همه xهای ممکن برابر با 1 و برای نیمی دیگر 0 است.

خروجی: 0 اگر و فقط اگر f ثابت باشد.

زمان اجرا: یک ارزیابی Uf. همیشه موفق می شود.

روش:

$vert 0 \rangle$⊗n|1〉 حالت را initialize کنید

→ 1 √2n 2n −1∑ x=0 |x〉 [ $vert 0 \rangle$ − |1〉 √2 ] ایجاد superposition با استفاده از دروازه‌های Hadamard

→ ∑ x (−1)f (x)|x〉 [ $vert 0 \rangle$ − |1〉 √2 ] تابع f را با استفاده از Uf محاسبه کنید

→ ∑ z ∑ x (−1)x·z+f (x)|z〉 √2n [ $vert 0 \rangle$ − |1〉 √2 ] تبدیل Hadamard را انجام دهید

→ z اندازه گیری کنید تا خروجی نهایی z را بدست آورید ما نشان داده‌ایم که یک کامپیوتر کوانتومی می‌تواند مشکل Deutsch را با یک ارزیابی حل کند – ارزشیابی تابع f در مقایسه با نیاز کلاسیک برای 2n/2 + 1 ارزیابی. این به نظر چشمگیر است، اما چند نکته مهم وجود دارد. اول، مشکل Deutsch نیست یک مشکل مهم است؛ هیچ کاربرد شناخته شده ای ندارد. دوم، مقایسه بین الگوریتم های کلاسیک و کوانتومی تا حدودی مقایسه سیب و پرتقال است، زیرا روش برای ارزیابی تابع در دو مورد بسیار متفاوت است. سوم، اگر آلیس مجاز باشد از یک کامپیوتر کلاسیک احتمالی استفاده کند، سپس با درخواست از باب برای ارزیابی f (x) برای چند x به صورت تصادفی می تواند بسیار سریع تعیین کند با احتمال بالا اینکه f ثابت یا متعادل است. این سناریو احتمالی است شاید واقع بینانه تر از سناریوی determinstic که ما در نظر گرفته ایم. علیرغم این ظرافت ها، الگوریتم Deutsch–Jozsa حاوی بذرهای الگوریتم های کوانتومی بیشتر و چشمگیرتر است، و درک اصول پشت آن روشنگر است. عملکرد آن.